

DSE 數學 (必修部分)

三角形四心：形心、垂心、外心、內心

溫習筆記 | 定義 · 性質 · 坐標求法 · 歷屆試題題型 · 常見錯誤

整理自 2012 – 2025 年 DSE 數學 (必修部分) 歷屆試卷

一分鐘速記

形心 G (centroid) = 三條中線交點 → 坐標 = 三頂點坐標的平均

垂心 H (orthocentre) = 三條高交點 → 兩條高聯立 (斜率相乘 = -1)

外心 O (circumcentre) = 三條垂直平分線交點 → 到三個頂點等距 (外接圓圓心)

內心 I (in-centre) = 三條角平分線交點 → 到三條邊等距 (內切圓圓心)

口訣：「中線形心、高垂心、垂直平分外心、角平分內心」；「外心頂點等距、內心三邊等距」。

1. 課程範圍 (考甚麼、考多深)

根據教育局《數學課程補充說明》(必修部分) 第 11 學習單位「圓的基本性質」的說明，老師應在此單位討論切線、內切圓及外接圓的概念，以銜接初中 (第三學習階段) 第 24 學習單位「三角形的各心」。換言之：

- 四心的定義及基本性質在中三已學，DSE 視為已有知識，可直接在試題中使用 (例如題目直接寫「Denote the in-centre of $\triangle OPQ$ by I 」)。
- 高中把四心與以下單位結合出題：直線的方程 (第 10 單位：斜率、垂直、交點)、軌跡 (第 12 單位：到兩點等距 → 垂直平分線；到兩條相交直線等距 → 角平分線)、圓的方程 (第 13 單位：過三點的圓、切線)、以及圓的基本性質 (第 11 單位：切線性質、圓心角、交錯弓形的角)。
- 考核深度：卷二多項選擇題要求快速計算坐標或判斷位置；卷一長題則要求說明理由 (如「證明 $OP = PQ$ 」、「 O 、 G 、 Q 是否共線？解釋」)。
- 不需背誦：一般三角形的垂心/外心坐標公式、歐拉線等 (筆記中標示為「延伸」的內容僅供檢查答案，不宜在卷一作為唯一理據)。

資料來源：教育局 Explanatory Notes to Senior Secondary Mathematics Curriculum (Compulsory Part) 第 23 頁；教育局《數學課程及評估指引 (中四至中六) 》2017 年更新版第 10–13 學習單位。

出題頻率 (按 2012–2025 歷屆試卷整理)

四心自 2013 年起幾乎每年都在卷二乙部出現一題 (大多是第 40–41 題)，2015 年起卷一最後兩三題 (坐標幾何長題) 亦經常出現。完整題目清單見第 6 節。

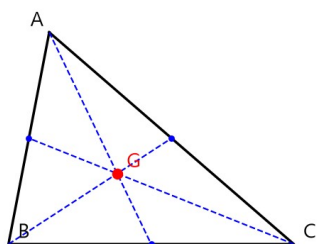
年份	卷一 (長題)	卷二 (MC)
2012	—	—
2013	—	Q43 外心

2014	—	Q41 內心 (圓幾何)
2015	Q18(c) 外心	Q42 垂心
2016	Q20 內心 + 外心	—
2017	—	Q41 內心
2018	Q18(b)(iii) 外心 ; Q19(b)(ii) 內切圓	Q40 垂心
2019	Q17 內切圓 / 角平分線	Q41 直角三角形四心位置
2020	Q17(b) 外心	Q40 內心
2021	Q19(c) 內切圓 (內心)	Q41 垂心
2022	Q19(c)(d) 內切圓 + 外接圓	Q41 外心
2023	Q19 外心 + 垂心 + 內心	Q41 內心
2024	Q17(b)(ii) 外接圓	Q41 四心綜合判斷
2025	Q18(b) 垂心 ; Q19(b)(iii) 內切圓 + 外接圓	Q41 內心

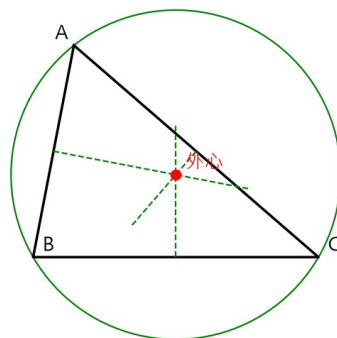
註：以上是逐頁檢視卷一乙部及卷二乙部的結果；卷一甲部及卷二甲部未發現四心題目，但未有逐題核對。

2. 四心的定義與性質

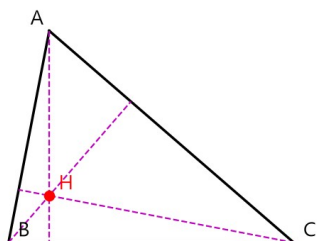
形心 G：三條中線的交點
AG : GM = 2 : 1



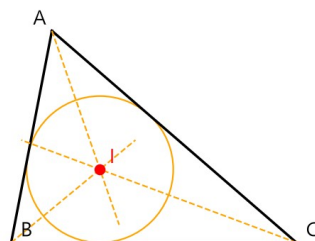
外心：三條垂直平分線的交點
到三個頂點距離相等 (外接圓圓心)



垂心 H：三條高 (頂點至對邊的垂線) 的交點



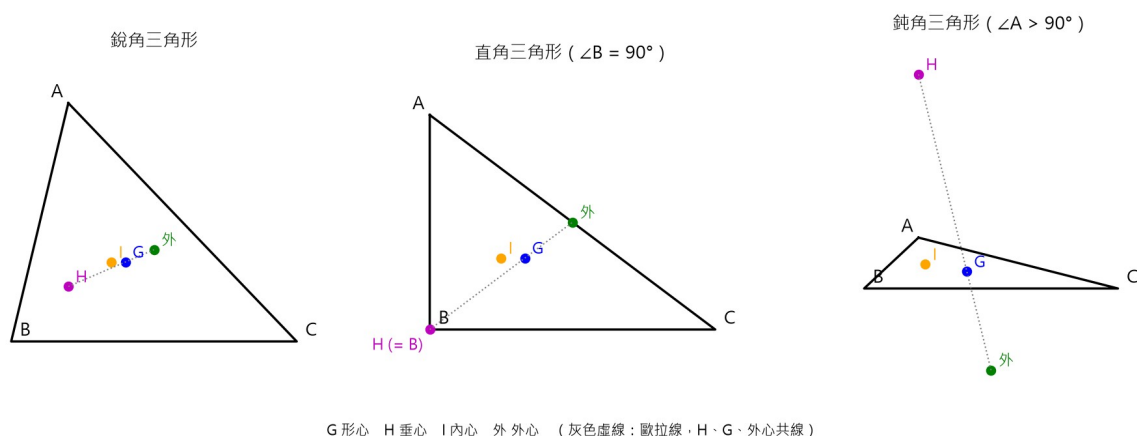
內心 I：三條角平分線的交點
到三條邊距離相等 (內切圓圓心)



	形心 G	垂心 H	外心 O	內心 I
由甚麼線交成	中線 (頂點 → 對邊中點)	高 (頂點 → 對邊的垂線)	各邊的垂直平分線	各內角的角平分線
等距性質	—	—	OA = OB = OC = R (外接圓半徑)	到三邊距離 = r (內切圓半徑)

重要性質	把中線分成 2:1 (頂點一方較長) ; 三條中線把三角形分成 6 塊等面積	每條高 $\perp$ 對邊 ; A、B、C、H 中任一點是其餘三點所成三角形的垂心	$\angle BOC = 2\angle A$ (銳角時) ; 外接圓通過三個頂點	$\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$; 面積 = $\frac{1}{2} r \times$ 周界
銳角三角形	內	內	內	內
直角三角形 ($\angle B = 90^\circ$)	內	在直角頂點 B	斜邊 AC 的中點	內
鈍角三角形	內	外	外	內
等腰三角形	四心都在對稱軸上 (共線)			
等邊三角形	四心重合			

記法：形心、內心永遠在三角形內；垂心、外心會「走出去」（鈍角時在外，直角時分別在直角頂點和斜邊中點）。



2.1 形心 G (centroid)

- 定義：三條中線的交點。
- 性質：G 把每條中線分成 $AG : GM = 2 : 1$ (M 為 BC 中點)。形心是三角形的「重心 / 平衡點」。
- 坐標： $G = ((x_1 + x_2 + x_3)/3, (y_1 + y_2 + y_3)/3)$ ，是唯一需要背的坐標公式，而且可直接使用。

2.2 垂心 H (orthocentre)

- 定義：三條高的交點 (高 = 由頂點向對邊所作的垂線)。
- 求法：找兩條高的方程，然後聯立。高的斜率 = $-1 \div$ (對邊斜率)。
- 捷徑：若某一邊在 x 軸或 y 軸上 (或平行於坐標軸)，對應的高就是垂直線 $x = h$ 或水平線 $y = k$ ，可省去一半計算 (2015 P2 Q42、2018 P2 Q40)。
- 直角三角形的垂心就在直角頂點；鈍角三角形的垂心在三角形外。

2.3 外心 O (circumcentre)

- 定義：三邊垂直平分線的交點；外接圓 (通過三個頂點的圓) 的圓心。
- 求法一 (垂直平分線)：兩條邊的垂直平分線聯立。垂直平分線 = 通過中點、斜率為原邊斜率負倒數的直線。

- 求法二（等距）：設 $O(h, k)$ ，列 $OA^2 = OB^2$ 、 $OA^2 = OC^2$ ，兩條一次方程聯立（二次項會互相抵消）。
- 求法三（圓方程）：設 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 通過三點，解出 D 、 E 、 F ，圓心 $= (-D/2, -E/2)$ 。
- 直角三角形捷徑：外心 = 斜邊中點， $R = \text{斜邊} \div 2$ （2013 P2 Q43、2022 P2 Q41、2022 P1 Q19(d)）。
- 若已知一邊在 x 軸上，例如 $O(0,0)$ 、 $P(p,0)$ ，外心必在 $x = p/2$ 上（2023 P1 Q19）。

2.4 內心 I (in-centre)

- 定義：三條內角平分線的交點；內切圓（與三邊都相切的圓）的圓心。
- 性質：I 到三條邊的垂直距離相等 $= r$ ；由頂點到兩個切點的切線長相等。
- 面積公式： $\triangle$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times r \times \text{周界}$ （即 $pr = 2a$ ，2019 P1 Q17(a) 要求證明）。
- 直角三角形： $r = (a + b - c)/2$ ， c 為斜邊；若直角頂點在原點、兩直角邊在坐標軸上，則 $I = (r, r)$ （2017 P2 Q41、2025 P2 Q41）。
- 求法一（角平分線 = 到兩線等距的軌跡）： $|a_1x + b_1y + c_1|/\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = |a_2x + b_2y + c_2|/\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ ，會得出兩條直線，要選內角那一條。
- 求法二（到三邊等距）：設 $I(h, k)$ ，以點到直線距離公式列式。
- 求法三（延伸，檢查用）： $I = (a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C)/(a + b + c)$ ，其中 a 、 b 、 c 分別是 A 、 B 、 C 對邊的長度。
- 圓幾何題：「I 是內心」 $\Rightarrow$ AI 、 BI 、 CI 平分三個角（2014 P2 Q41 只需用這一點）。

2.5 延伸：歐拉線（檢查答案用）

任何三角形的垂心 H 、形心 G 、外心 O 共線，而且 $HG : GO = 2 : 1$ 。內心一般不在這條線上（等腰三角形除外）。例如 2023 P1 Q19 中 $H(14, 10.5)$ 、 $G(21\frac{1}{3}, 16)$ 、外心 $(25, 18.75)$ ， $HG : G \text{ 外心} = 2 : 1$ ，可用來驗算。此性質不在課程內，卷一不宜直接引用。

3. 解題工具箱（坐標幾何）

工具	公式	用途
中點	$((x_1+x_2)/2, (y_1+y_2)/2)$	中線、垂直平分線
斜率	$m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$	高、垂直平分線
垂直	$m_1 \times m_2 = -1$	高、垂直平分線、切線 $\perp$ 半徑
距離	$\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$	外心等距、邊長
點到直線距離	$ ax_0 + by_0 + c / \sqrt{a^2 + b^2}$	內心、內切圓半徑、切線
圓方程	$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ；圓心 $(-D/2, -E/2)$ ， $r^2 = D^2/4 + E^2/4 - F$	外接圓、內切圓
切線	代入圓方程後判別式 $\Delta = 0$ ，或圓心到直線距離 $= r$	內切圓題

4. 歷屆試題題型與詳解

以下答案均經重新計算核對；題目為撮要，完整題目請翻閱資料夾內相應年份的 PDF。

題型 A：卷二 MC — 已知三點（或條件），求中心坐標

【2015 卷二 Q42 垂心】

題目撮要：O 為原點，P(0, 60)、Q(96, 48)。求 $\triangle OPQ$ 垂心的 x 坐標。

解題步驟：

OP 在 y 軸上，所以由 Q 到 OP 的高是水平線 $y = 48$ 。

PQ 的斜率 = $(48 - 60)/96 = -1/8$ ，所以由 O 出發的高斜率 = 8，方程 $y = 8x$ 。

聯立： $8x = 48 \Rightarrow x = 6$ 。

答案： $x = 6$ (A)

💡 有一邊在坐標軸上時，先寫那條「水平 / 垂直」的高，只需再找一條。

【2018 卷二 Q40 垂心（參數會消失）】

題目撮要：直線 $2x + 5y = a$ ($a > 0$) 交 x 軸於 P、y 軸於 Q；R 在 y 軸上， $\triangle PQR$ 垂心的 x 坐標為 10。求 R 的 y 坐標。

解題步驟：

$P = (a/2, 0)$ ， $Q = (0, a/5)$ ，設 $R = (0, k)$ 。QR 在 y 軸上 $\Rightarrow$ 由 P 出發的高是 $y = 0$ ，所以垂心 $H = (10, 0)$ 。

由 R 出發的高 $\perp$ PQ：PQ 斜率 = $-2/5$ ，高的斜率 = $5/2$ ，通過 $R(0, k)$ ： $y = (5/2)x + k$ 。

$H(10, 0)$ 在其上： $0 = 25 + k \Rightarrow k = -25$ 。

答案： -25 (A)

💡 a 完全不影響答案，這是 MC 常見設計，不要被參數嚇怕。

【2021 卷二 Q41 垂心（反求頂點）】

題目撮要：O 為原點，P(26, -18)， $\triangle OPQ$ 的垂心為 (21, -3)。求 Q 的 y 坐標。

解題步驟：

設 $Q(u, v)$ ， $H(21, -3)$ 。

PH 是高 $\Rightarrow PH \perp OQ$ ：PH 的方向 = $(-5, 15) \propto (-1, 3)$ ，所以 $-u + 3v = 0$ ，即 $u = 3v$ 。

OH 是高 $\Rightarrow OH \perp PQ$ ：OH 的方向 = $(21, -3) \propto (7, -1)$ ，所以 $7(u - 26) - (v + 18) = 0 \Rightarrow 7u - v = 200$ 。

代入 $u = 3v$ ： $21v - v = 200 \Rightarrow v = 10$ 。

答案：10 (C)

💡 用「方向向量的點積 = 0」代替斜率相乘，可避免分母為零的麻煩。

【2013 卷二 Q43 / 2022 卷二 Q41 外心 (直角三角形)】

題目撮要：2013：O(0,0)、A(0,12)、B(30,12)，求 $\triangle OAB$ 外心的 y 坐標。

2022：A(a,0)、B(0,b) (a, b > 0)， $\triangle OAB$ 的外心在 $4x + 16y = 17a$ 上，求 a : b。

解題步驟：

2013：OA 在 y 軸、AB 水平 $\Rightarrow \angle OAB = 90^\circ$ ，外心 = 斜邊 OB 的中點 (15, 6)，y 坐標 = 6 (A)。

2022： $\angle AOB = 90^\circ \Rightarrow$ 外心 = AB 中點 (a/2, b/2)。代入： $2a + 8b = 17a \Rightarrow 8b = 15a \Rightarrow a : b = 8 : 15$ (A)。

答案：2013：6；2022：8:15

💡 考評報告 (2022) 指出只有約三成考生答對，很多人誤以為是形心在直線上而選 C。先看清題目問哪一個「心」！

【2017 卷二 Q41 / 2025 卷二 Q41 內心 (直角三角形 I = (r, r))】

題目撮要：2017：P(p, 0)、Q(0, q) (p, q > 0)， $\triangle OPQ$ 的內心在 $3x + 4y = 3p$ 上，求 p : q。

2025：U(20, 0)、V 在正 y 軸上， $\triangle OUV$ 內心的 x 坐標為 6，求 $\triangle OUV$ 的面積。

解題步驟：

直角在 O，兩邊在坐標軸上 $\Rightarrow$ 內心 I = (r, r)， $r = (\text{兩直角邊之和} - \text{斜邊})/2$ 。

2017： $7r = 3p \Rightarrow r = 3p/7$ 。 $p + q - \sqrt{p^2 + q^2} = 6p/7 \Rightarrow \sqrt{p^2 + q^2} = q + p/7$ ，平方： $p^2 = 2pq/7 + p^2/49 \Rightarrow q = 24p/7 \Rightarrow p : q = 7 : 24$ (D)。

2025： $r = 6$ ，設 V(0, v)： $20 + v - \sqrt{400 + v^2} = 12 \Rightarrow \sqrt{400 + v^2} = v + 8 \Rightarrow 400 = 16v + 64 \Rightarrow v = 21$ 。面積 = $\frac{1}{2} \times 20 \times 21 = 210$ (C)。

答案：2017：7:24；2025：210

【2020 卷二 Q40 內心 (對稱 + 等距)】

題目撮要：三邊為 $4x + 3y = 24$ 、 $4x - 3y = 24$ 、 $x = a$ ，內心的 x 坐標是 31，求 a。

解題步驟：

前兩條線交於 (6, 0)，並關於 x 軸對稱； $x = a$ 亦關於 x 軸對稱 $\Rightarrow$ 內心在 x 軸上：I = (31, 0)。

I 到 $4x + 3y - 24 = 0$ 的距離 = $|124 - 24|/5 = 20 = r$ 。

I 到 $x = a$ 的距離也是 20 $\Rightarrow a = 51$ 或 11。內心必在三角形內，而三角形在 $x = 6$ 與 $x = a$ 之間，所以 $a > 31 \Rightarrow a = 51$ 。

答案：51 (D)

💡 等距方程會出兩個解，要用「內心在三角形內」剔除一個。

【2023 卷二 Q41 內心 (角平分線的對稱)】

題目撮要： $L_1: 3x - 4y + k = 0$ ， $L_2: 4x + 3y - k = 0$ ($k > 0$)。 L_1 交 x 軸於 P ， L_1 、 L_2 交於 Q ， R 在 L_2 上且 $\triangle PQR$ 的內心在 x 軸上，求 R 的 x 坐標。

解題步驟：

$P = (-k/3, 0)$ 。內心在 x 軸上 $\Rightarrow x$ 軸 (直線 PI) 是 $\angle QPR$ 的角平分線 $\Rightarrow PR$ 是 PQ 關於 x 軸的反射。

L_1 斜率 $= 3/4 \Rightarrow PR$ 斜率 $= -3/4: y = -(3/4)(x + k/3)$ 。

與 L_2 聯立： $4x + 3[-(3/4)x - k/4] - k = 0 \Rightarrow (7/4)x = 7k/4 \Rightarrow x = k$ 。

答案： k (C)

💡 「內心在某直線上」往往等於「該直線是角平分線」，用反射 / 對稱最快。

題型 B：卷二 MC — 概念判斷 (位置、共線)

【2019 卷二 Q41】

題目撮要： $\triangle ABC$ 中 $\angle ABC = 90^\circ$ 。判斷：I. 垂心在 AC 上；II. 形心在 $\triangle ABC$ 內；III. 內心在 $\triangle ABC$ 外。

解題步驟：

直角三角形的垂心在直角頂點 B ，不在 AC 上 $\Rightarrow$ I 錯。

形心永遠在三角形內 $\Rightarrow$ II 對。內心永遠在三角形內 $\Rightarrow$ III 錯。

答案：只有 II (B)

【2024 卷二 Q41】

題目撮要： G 、 H 、 I 、 J 分別為 $\triangle PQR$ 的形心、垂心、內心、外心， $\angle PQR = \angle PRQ = 22^\circ$ 。判斷：I. G 在 $\triangle PQR$ 內；II. H 在 $\triangle PQR$ 外；III. I 、 J 、 Q 共線。

解題步驟：

形心永遠在內 $\Rightarrow$ I 對。

$\angle QPR = 180^\circ - 44^\circ = 136^\circ > 90^\circ$ ，鈍角三角形的垂心在外 $\Rightarrow$ II 對。

等腰 ($PQ = PR$) $\Rightarrow$ 四心都在對稱軸上，而對稱軸通過 P 及 QR 中點，不通過 $Q \Rightarrow$ III 錯。

答案：I 和 II (A)

題型 C：卷二 MC — 圓幾何中的內心

【2014 卷二 Q41】

題目撮要：PQS 為圓，PQ 延長至 R，RS 在 S 切圓；I 為 $\triangle QRS$ 的內心， $\angle IRQ = 12^\circ$ 、 $\angle PSQ = 70^\circ$ ，求 $\angle QPS$ 。

解題步驟：

I 是內心 $\Rightarrow$ RI 平分 $\angle QRS \Rightarrow \angle QRS = 24^\circ$ 。

交錯弓形的角： $\angle RSQ = \angle QPS$ ，設為 x 。

在 $\triangle PSR$ ： $x + (70^\circ + x) + 24^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 43^\circ$ 。

答案： 43° (C)

題型 D：卷一長題 — 坐標幾何綜合

【2015 卷一 Q18(c) 外心】

題目撮要： $f(x) = 2x^2 - 4kx + 3k^2 + 5$ 。S、T 分別是 $y = f(x)$ 與 $y = 2 - f(x)$ 上的動點。有人說當 S、T 最接近時， $\triangle OST$ 的外心在 x 軸上。是否正確？

解題步驟：

配方： $f(x) = 2(x - k)^2 + k^2 + 5$ ，頂點 $(k, k^2 + 5)$ ； $y = 2 - f(x)$ 的頂點為 $(k, -k^2 - 3)$ 。兩圖像關於 $y = 1$ 對稱，S、T 最接近時就是兩個頂點。

ST 是垂直線段 $\Rightarrow$ 外心在 ST 的垂直平分線 $y = ((k^2 + 5) + (-k^2 - 3))/2 = 1$ 上。

外心的 y 坐標是 $1 \neq 0$ ，所以不在 x 軸上。

答案：說法不正確。

【2016 卷一 Q20 內心 + 外心】

題目撮要： $\triangle OPQ$ 為鈍角三角形，I、J 分別為內心及外心，P、I、J 共線。(a) 證明 $OP = PQ$ 。(b) $O(0,0)$ 、 $Q(40,30)$ ，P 的 y 坐標為 19，C 為通過 O、P、Q 的圓，(i) 求 C 的方程。

解題步驟：

(a) J 是外心 $\Rightarrow$ J 在 OQ 的垂直平分線上；P、I、J 共線 $\Rightarrow$ J 在 $\angle OPQ$ 的角平分線上。若這兩條直線不同，它們只會交於外接圓上 OQ 弧的中點，但 J 是圓心，不在圓上，矛盾。所以 $\angle OPQ$ 的角平分線就是 OQ 的垂直平分線 $\Rightarrow$ P 在 OQ 的垂直平分線上 $\Rightarrow OP = PQ$ 。

(b)(i) OQ 的中點 $(20, 15)$ ，垂直平分線斜率 $-4/3$ 。 $y = 19 \Rightarrow 4 = -(4/3)(x - 20) \Rightarrow P = (17, 19)$ 。

外心 J 在同一垂直平分線上： $J = (a, (125 - 4a)/3)$ 。 $JO = JP \Rightarrow 17a + 19b = 325$ ，代入得 $a = 56$ ， $b = -33$ ， $J = (56, -33)$ 。

半徑² $= 56^2 + 33^2 = 4225 \Rightarrow C: x^2 + y^2 - 112x + 66y = 0$ 。

答案：(a) 見上；(b)(i) $x^2 + y^2 - 112x + 66y = 0$

💡 關鍵句：「等腰三角形中，頂角的角平分線 = 底邊的垂直平分線」。

【2018 卷一 Q18(b)(iii) 外心】

題目撮要： $f(x) = 3x^2 + 24x$ (由 $f(2) = 60$ 、 $f(3) = 99$ 求得)。Q 為 $y = f(x)$ 的頂點，R 為 $y = 27 - f(x)$ 的頂點，S(56, 0)，P 為 $\triangle QRS$ 的外心。描述 P、Q、R 的幾何關係。

解題步驟：

$$f(x) = 3(x + 4)^2 - 48 \Rightarrow Q = (-4, -48) ; 27 - f(x) \text{ 的頂點 } R = (-4, 75)。$$

$$QR \text{ 垂直} \Rightarrow \text{外心在 } QR \text{ 的垂直平分線 } y = 13.5 \text{ 上} ; \text{ 設 } P(h, 13.5) \cdot PQ = PS \Rightarrow (h + 4)^2 + 61.5^2 = (h - 56)^2 + 13.5^2 \Rightarrow h = -4。$$

$$P = (-4, 13.5) = QR \text{ 的中點}。(\text{驗證：} SQ \perp SR, \text{ 因 } (-60)(-60) + (-48)(75) = 0, \text{ 即 } \angle QSR = 90^\circ。)$$

答案：P 是 QR 的中點 (P、Q、R 共線)。

💡 外心落在某邊中點 $\Leftrightarrow$ 該邊對的角是直角。

【2018 卷一 Q19(b)(ii) 內切圓】

題目撮要：圓 C 圓心 (8, 2)，L: $kx - 5y - 21 = 0$ 與 C 相切並通過 D(18, 39)；L 交 y 軸於 E，F 使 C 為 $\triangle DEF$ 的內切圓。 $\triangle DEF$ 是否鈍角三角形？

解題步驟：

$$D \text{ 在 } L \text{ 上} \Rightarrow 18k - 216 = 0 \Rightarrow k = 12 ; r = |96 - 10 - 21|/13 = 5 ; E = (0, -4.2)。$$

設圓心 G(8, 2)。C 是內切圓 $\Rightarrow DG$ 、 EG 分別平分 $\angle D$ 、 $\angle E$ 。

$$DG = \sqrt{(10^2 + 37^2)} = \sqrt{1469} \Rightarrow \sin(\frac{1}{2}\angle D) = 5/\sqrt{1469} \Rightarrow \angle D \approx 15.0^\circ ; EG = \sqrt{(8^2 + 6.2^2)} = \sqrt{102.44} \Rightarrow \sin(\frac{1}{2}\angle E) = 5/\sqrt{102.44} \Rightarrow \angle E \approx 59.2^\circ。$$

$$\angle F \approx 180^\circ - 15.0^\circ - 59.2^\circ \approx 105.8^\circ > 90^\circ。$$

答案：是鈍角三角形。

💡 內切圓 + 切線 $\Rightarrow$ 圓心與頂點的連線平分該角，這是把「內心」轉化成三角學的橋樑。

【2019 卷一 Q17 內切圓與角平分線】

題目撮要：(a) $\triangle CDE$ 的面積 a 、周界 p 、內切圓半徑 r ，證明 $pr = 2a$ 。(b) H(9,12)、K(14,0)，P 到 OH 與到 HK 的距離相等，軌跡為 Γ 。(i) 描述 Γ 與 $\angle OHK$ 的關係；(ii) 利用 (a) 求 Γ 的方程。

解題步驟：

$$(a) \text{ 以內心 } I \text{ 把三角形分成三個以 } r \text{ 為高的三角形} : a = \frac{1}{2}r(CD + DE + EC) = \frac{1}{2}rp \Rightarrow pr = 2a。$$

(b)(i) Γ 是 $\angle OHK$ 的角平分線。

(ii) $OH = 15 \cdot HK = 13 \cdot OK = 14$ ，面積 $= \frac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84$ ，周界 $42 \Rightarrow r = 2 \times 84 \div 42 = 4$ ，即 $\triangle OHK$ 內心的 y 坐標是 4。

內心 x 坐標 (可由 I 到 OH 的距離 $= 4$ 求得)： $I = (8, 4)$ 。 Γ 通過 $H(9, 12)$ 與 $I(8, 4)$ ：斜率 $8 \Rightarrow 8x - y - 60 = 0$ 。

答案：(b)(i) 角平分線；(ii) $8x - y - 60 = 0$

💡 「利用 (a)」就是提示你用面積求 r ，從而得到內心。

【2020 卷一 Q17(b) 外心 (證明不存在)】

題目撮要： $g(x) = x^2 - 2kx + 2k^2 + 4$ 。 D 、 E 分別為 $y = g(x + 2)$ 及 $y = -g(x - 2)$ 的頂點。是否存在 F ，使 $\triangle DEF$ 的外心為 $(0, 3)$ ？

解題步驟：

$$g(x) = (x - k)^2 + k^2 + 4 \Rightarrow D = (k - 2, k^2 + 4) \cdot E = (k + 2, -k^2 - 4)。$$

$$\text{外心 } (0, 3) \text{ 必須到 } D、E \text{ 等距：} (k - 2)^2 + (k^2 + 1)^2 = (k + 2)^2 + (k^2 + 7)^2。$$

$$\text{化簡：} 12k^2 + 8k + 48 = 0 \cdot \text{即 } 3k^2 + 2k + 12 = 0 \cdot \text{判別式 } = 4 - 144 < 0 \cdot \text{無實數解。}$$

答案：不存在這樣的 F 。

💡 外心問題的第一步永遠是「到頂點等距」， F 未知也不影響。

【2021 卷一 Q19(c) 內切圓 (等腰三角形)】

題目撮要： $f(x) = x^2 - 12kx - 14x + 36k^2 + 89k + 53$ ($k > 0$)。 Q 、 R 分別為 $y = f(x)$ 、 $y = f(14 - x)$ 的頂點。 $S(7, 4 - 3k)$ 。 C 為 $\triangle QRS$ 的內切圓。(i) 求 QS 的方程；(ii) 求 C 的方程；(iii) QS 在 T 切 C 。 U 為 C 的圓心。 $V(-29, -14)$ 。 $STUV$ 可否是長方形？

解題步驟：

$Q = (6k + 7, 5k + 4)$ ， $R = (7 - 6k, 5k + 4)$ 。 QR 水平， S 在對稱軸 $x = 7$ 上 $\Rightarrow \triangle QRS$ 等腰，內心 U 在 $x = 7$ 上。

$$(i) QS \text{ 斜率 } = 8k/6k = 4/3 : 4x - 3y - 16 - 9k = 0。$$

$$(ii) \text{設 } U(7, y_0) \cdot \text{到 } QR \text{ 的距離 } = (5k + 4) - y_0 ; \text{到 } QS \text{ 的距離 } = (3y_0 - 12 + 9k)/5 \cdot \text{相等 } \Rightarrow y_0 = 2k + 4 \cdot r = 3k \Rightarrow (x - 7)^2 + (y - 2k - 4)^2 = 9k^2。$$

$$(iii) \angle STU = 90^\circ \text{ (切線 } \perp \text{ 半徑) } \cdot \text{若 } STUV \text{ 為長方形則 } V = S + U - T \cdot T = U \text{ 在 } QS \text{ 上的垂足 } = (7 + 2.4k, 4 + 0.2k) \cdot \text{所以 } S + U - T = (7 - 2.4k, 4 - 1.2k) \cdot \text{令其 } = (-29, -14) \Rightarrow \text{兩式都給 } k = 15。$$

答案：(iii) 可能 ($k = 15$ 時)。

【2022 卷一 Q19(c)(d) 內切圓 + 外接圓】

題目撮要：圓 C 圓心 $G(83, 112)$ ，通過 $(23, 67)$ ； $A(158, 12)$ 在圓外， AP 、 AQ 在 P 、 Q 切 C 。(c) 求 $\triangle APQ$ 內切圓方程；(d) 有人說內切圓與外接圓面積之比為 $1:4$ ，是否同意？

解題步驟：

$$r_C^2 = 60^2 + 45^2 \Rightarrow r_C = 75; AG = \sqrt{75^2 + 100^2} = 125。$$

(c) 由對稱， $\triangle APQ$ 的內心在 AG 上；可證明它就是 AG 與圓 C 的交點（切線與弦的夾角 = 圓周角 $\Rightarrow$ PI 平分 $\angle APQ$ ）。 $I = G + (75/125)(A - G) = (128, 52)。$

$$AG \text{ 與 } PQ \text{ 交於 } M(110, 76) \text{ (} GM = r^2 \div AG = 45 \text{)}，\text{內切圓半徑} = IM = 75 - 45 = 30 \Rightarrow (x - 128)^2 + (y - 52)^2 = 900。$$

(d) $\angle APG = \angle AQG = 90^\circ \Rightarrow A、P、G、Q$ 共圓且 AG 為直徑 $\Rightarrow$ 外接圓半徑 $= 125/2$ 。面積比 $= 30^2 : (125/2)^2 = 144 : 625 \neq 1 : 4$ 。

答案：(c) $(x - 128)^2 + (y - 52)^2 = 900$ ；(d) 不同意

💡 考評報告指出很多考生不懂用切線性質求內切圓，也看不出 AG 是外接圓的直徑。

【2023 卷一 Q19 外心、垂心、內心同場】

題目撮要： $P(50, 0)$ 、 $Q(32, t)$ ($t > 0$)， OQ 是 $\triangle OPR$ 的中線； G 、 H 分別為 $\triangle OPR$ 的外心及垂心。(a) 以 t 表示 G 、 H ；(b)(i) 若 $\angle PQS = \angle POQ$ (S 在 OP 上， $QS \perp OP$)，證明 $t = 24$ ；(ii) O 、 G 、 Q 是否共線？(iii) I 為 $\triangle OPR$ 的內心，求 $\triangle GHR$ 與 $\triangle IPQ$ 面積之比。

解題步驟：

OQ 是中線 $\Rightarrow Q$ 是 PR 中點 $\Rightarrow R = (14, 2t)。$

(a) 外心 G 在 OP 的垂直平分線 $x = 25$ 上； $GO = GR \Rightarrow 625 + y^2 = 121 + (y - 2t)^2 \Rightarrow G = (25, t - 126/t)。$ 垂心 H 在由 R 出發的高 $x = 14$ 上； $OH \perp PR$ (PR 斜率 $-t/18$) $\Rightarrow OH : y = 18x/t \Rightarrow H = (14, 252/t)。$

(b)(i) $S = (32, 0)$ ， $\tan \angle PQS = 18/t$ ， $\tan \angle POQ = t/32 \Rightarrow t^2 = 576 \Rightarrow t = 24。$

(ii) $G = (25, 18.75)$ ， OG 斜率 $= 0.75 = OQ$ 斜率 $(24/32) \Rightarrow$ 共線。(原因： $OP = OR = 50$ ， $\triangle OPR$ 等腰，四心都在對稱軸 OQ 上。)

(iii) 三邊： $OP = 50$ 、 $OR = 50$ 、 $PR = 60$ 。 $I = (60 \cdot O + 50 \cdot P + 50 \cdot R)/160 = (20, 15)$ (亦可由 I 在 OQ 上及 $r = \text{面積} \div \text{半周界} = 1200 \div 80 = 15$ 得出)。

$\triangle GHR$ ： HR 垂直 ($x = 14$)，長 $48 - 10.5 = 37.5$ ，高 $= 25 - 14 = 11$ ，面積 $= 206.25$ 。 $\triangle IPQ$ ：用坐標面積公式得 225 。比 $= 206.25 : 225 = 11 : 12$ 。

答案：(b)(ii) 共線；(b)(iii) $11 : 12$

💡 看到兩邊相等 (等腰)，立即想到「四心共線於對稱軸」。

【2024 卷一 Q17(b)(ii) 外接圓 (切線四邊形)】

題目撮要：Q(10, -1)、R(-4, -9)、C 通過 Q、R 及 (4, 3)。U(10, 4) 在 C 外，UV、UW 在 V、W 切 C。
 $\triangle UVW$ 的外接圓面積是否大於 100？

解題步驟：

$$C: x^2 + y^2 - 6x + 10y - 31 = 0, \text{ 圓心 } K(3, -5), r^2 = 65。$$

$\angle UVK = \angle UWK = 90^\circ \Rightarrow U、V、K、W$ 共圓，UK 為直徑 $\Rightarrow \triangle UVW$ 的外接圓就是以 UK 為直徑的圓。

$$UK^2 = 7^2 + 9^2 = 130 \Rightarrow \text{面積} = \pi \times 130/4 = 32.5\pi \approx 102.1 > 100。$$

答案：是 (約 102.1)

💡 2022 Q19(d) 與此題同一招：外點 + 兩條切線 $\Rightarrow$ 外點與圓心的連線是外接圓直徑。

【2025 卷一 Q18(b) 垂心在原點】

題目撮要： $g(x) = 3x^2 - 6kx + 24x + 3k^2 - 24k + 55$ ($k > 0$)，R 為頂點； $y = h(x)$ 由 $y = g(x)$ 向右移 6、向下移 10 得出，頂點為 S；T 使 $\triangle RST$ 的垂心為原點。(i) 以 k 表示 T；(ii) U(-5, 5)、V 在 RS 上且 $TV \perp RS$ ，S、T、U、V 共圓，求 k。

解題步驟：

$$g(x) = 3(x - k + 4)^2 + 7 \Rightarrow R = (k - 4, 7), S = (k + 2, -3)。$$

(i) 垂心 O $\Rightarrow OT \perp RS$ ：RS 方向 $(6, -10) \propto (3, -5)$ ，所以 $T = \lambda(5, 3)$ 。又 $RT \perp OS$ ： $(5\lambda - k + 4)(k + 2) - 3(3\lambda - 7) = 0 \Rightarrow \lambda = (k^2 - 2k - 29)/(5k + 1)$ ， $T = (5\lambda, 3\lambda)$ 。

(ii) $TV \perp RS \Rightarrow \angle SVT = 90^\circ$ ，S、T、U、V 共圓 $\Rightarrow ST$ 是直徑 $\Rightarrow \angle SUT = 90^\circ \Rightarrow US \cdot UT = 0$ ： $(k + 7)(5\lambda + 5) - 8(3\lambda - 5) = 0 \Rightarrow \lambda(5k + 11) = -(5k + 75)。$

代入 λ ： $5k^3 + 26k^2 + 213k - 244 = 0 \Rightarrow (k - 1)(5k^2 + 31k + 244) = 0 \Rightarrow k = 1$ (另一因式無實根)。驗算： $k = 1$ 時 $T = (-25, -15)。$

答案：(ii) $k = 1$

【2025 卷一 Q19(b) 內切圓 + 外接圓】

題目撮要： $L: 4x - 3y + 83 = 0$ ； $C: x^2 + y^2 + ax - 2y + b = 0$ ($a, b > 0$) 通過 $(-10, 9)$ 並與 L 相切。
 $P(-20, 1)$ 、Q 在 L 下方，PQ 切 C 且 $PQ = 25$ ，I 為 C 的圓心。(i) 求 $\cos \angle IPQ$ ；(ii) 求 IQ；(iii) R 在 L 上使 C 為 $\triangle PQR$ 的內切圓，外接圓半徑為 r，有人說 $r > PQ$ ，是否正確？

解題步驟：

(a) 部分得 $a = 20$ 、 $b = 37 \Rightarrow I = (-10, 1)$ ，半徑 8。PI = 10，由 P 出發的切線長 $= \sqrt{(100 - 64)} = 6。$

(i) $\cos \angle IPQ = 6/10 = 3/5。$

(ii) 餘弦定理： $IQ^2 = 10^2 + 25^2 - 2(10)(25)(3/5) = 425 \Rightarrow IQ = 5\sqrt{17}$ 。

(iii) $\angle QPR = 2\angle IPQ \Rightarrow \sin\angle QPR = 2 \times (4/5)(3/5) = 24/25$ 。切線長：P 為 6，Q 為 $25 - 6 = 19$ ，R 設為 x 。

面積兩種寫法： $8 \times (6 + 19 + x) = \frac{1}{2} \times 25 \times (6 + x) \times 24/25 \Rightarrow 200 + 8x = 72 + 12x \Rightarrow x = 32 \Rightarrow QR = 51$ 。

正弦定理： $r = QR \div (2 \sin\angle QPR) = 51 \times 25/48 \approx 26.6 > 25$ 。

答案：(i) $3/5$ ；(ii) $5\sqrt{17}$ ；(iii) 正確

💡 內切圓題常用：切線長相等 + 面積 = $r \times$ 半周界 + 正弦定理 $R = a/(2 \sin A)$ 。

5. 常見錯誤

錯誤	正確做法 / 提醒	出處
混淆四心（例如題目問外心，卻用形心公式）	先圈出題目中的「centroid / orthocentre / circumcentre / in-centre」，再決定方法。	2022 P2 Q41 考評報告：很多考生誤以為是形心而選 C
以為所有中心都在三角形內	只有形心、內心永遠在內；鈍角三角形的垂心、外心在外。	2019 P2 Q41、2024 P2 Q41
直角三角形仍然慢慢聯立	垂心 = 直角頂點；外心 = 斜邊中點；內心 = (r, r) （直角在原點時）。	2013 P2 Q43、2017 P2 Q41、2022 P2 Q41、2025 P2 Q41
內心與外心的「等距」搞反	外心：到三個頂點等距；內心：到三條邊等距（用點到直線距離公式）。	2020 P2 Q40
角平分線方程有兩條，選錯	$... /\sqrt{...} = ... /\sqrt{...}$ 會得出內角及外角平分線，要用「內心在三角形內」或草圖剔除。	2020 P2 Q40（ $a = 11$ 要捨去）
內心加權公式用錯邊	$I = (aA + bB + cC)/(a + b + c)$ ， a 是 A 的對邊，不是鄰邊（只作檢查用）。	2023 P1 Q19(b)(iii)
看不出等腰三角形的對稱	兩邊相等 $\Rightarrow$ 四心共線於對稱軸；對稱軸通過頂角頂點及底邊中點。	2016 P1 Q20、2023 P1 Q19、2024 P2 Q41
內切圓題只懂代公式	切線 $\perp$ 半徑、切線長相等、圓心與頂點連線平分該角。	2022 P1 Q19 考評報告：多數考生未用切線性質求內切圓
外點 + 兩切線的外接圓	外點與圓心的連線是外接圓直徑（兩個 90° 角）。	2022 P1 Q19(d)、2024 P1 Q17(b)(ii)
卷一只寫答案不寫理由	卷一「Explain your answer」要寫出所用性質，例如「 $\therefore$ 外心到各頂點等距」。	2015 P1 Q18(c)、2020 P1 Q17(b)

6. 歷屆試題練習清單（附答案）

建議先做卷二 MC 熱身，再做卷一長題。

年份	試卷 / 題號	涉及的心	答案
2013	P2 Q43	外心 (直角)	A (6)
2014	P2 Q41	內心 (圓幾何)	C (43°)
2015	P1 Q18(c)	外心	不正確 (外心 y 坐標 = 1)
2015	P2 Q42	垂心	A (6)
2016	P1 Q20	內心 + 外心	$OP = PQ$; $x^2 + y^2 - 112x + 66y = 0$
2017	P2 Q41	內心 (直角)	D (7 : 24)
2018	P1 Q18(b)(iii)	外心	P 為 QR 中點
2018	P1 Q19(b)(ii)	內切圓	是鈍角三角形 ($\angle F \approx 105.8^\circ$)
2018	P2 Q40	垂心	A (-25)
2019	P1 Q17	內切圓 / 角平分線	$8x - y - 60 = 0$
2019	P2 Q41	四心位置	B (II only)
2020	P1 Q17(b)	外心	不存在
2020	P2 Q40	內心	D (51)
2021	P1 Q19(c)	內切圓	$(x - 7)^2 + (y - 2k - 4)^2 = 9k^2$; 可以 ($k = 15$)
2021	P2 Q41	垂心	C (10)
2022	P1 Q19(c)(d)	內切圓 + 外接圓	$(x - 128)^2 + (y - 52)^2 = 900$; 不同意 (144 : 625)
2022	P2 Q41	外心 (直角)	A (8 : 15)
2023	P1 Q19	外心 + 垂心 + 內心	共線 ; 11 : 12
2023	P2 Q41	內心	C (k)
2024	P1 Q17(b)(ii)	外接圓	是 (≈ 102.1)
2024	P2 Q41	四心綜合	A (I and II only)
2025	P1 Q18(b)	垂心	$k = 1$
2025	P1 Q19(b)(iii)	內切圓 + 外接圓	正確 ($r \approx 26.6 > 25$)
2025	P2 Q41	內心 (直角)	C (210)

答案由本筆記重新計算，並與卷內手寫答案及評卷參考 (如有) 對照。